定理：（Cramer 法则）若 $A=(a_{ij})=(\vec{\alpha_1},\cdots,\vec{\alpha_n})$ 可逆，则

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

有唯一解. $(x_1,\cdots,x_n)=\left(\frac{\Delta_1}{\Delta},\frac{\Delta_2}{\Delta},\cdots,\frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$

其中 $\Delta=\det(A)$，$\Delta_i=\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},b,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_n)$.

证：$X=A^{-1}b=\frac{1}{\det A}A^*b \Rightarrow x_i=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}A_{ki}b_k=\frac{\Delta_i}{\Delta}$

例：

$$\begin{cases} x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+x_3+x_4=2 \\ x_1+x_2+x_4=3 \\ x_1+x_2+x_3=4 \end{cases}$$

$\Delta=-3$，$\Delta_1=-7$，$\Delta_2=-4$，$\Delta_3=-1$，$\Delta_4=2$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7/3 \\ 4/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

理论分析，运算量大！

§ 初等变换

利用矩阵乘法表达矩阵的初等变换.

回顾：$\left.\begin{array}{l}\text{矩阵的初等(行)变换 (3)} \\ \rightsquigarrow \text{矩阵的初等(列)变换 (3)}\end{array}\right\} \Rightarrow$ 初等变换 (6)

初等方阵：

1) 交换单位矩阵的 i, j 行 (或 i, j 列)

$$S_{ij} = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 0 & & 1 && \\ &&& \ddots &&& \\ && 1 & \cdot & 0 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdots\ i\text{行} \\ \\ \cdots\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

2) 将单位矩阵的第 i 行 (或 i 列) 乘以非零常数 λ.

$$D_i(\lambda) = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \lambda &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

3) 将单位矩阵的第 j 行的 λ 倍加到第 i 行 (或 i 列的 λ 倍加到 j 列)

$$T_{ij}(\lambda) = \left(\begin{array}{cccccc} 1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && 1 && \lambda & \\ &&& \ddots && \\ &&&& 1 & \\ &&&&& \ddots \ 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}$$

定理：对矩阵作初等行变换，相当于在矩阵的左边乘以一个相应的初等方阵

对矩阵作初等列变换，相当于在矩阵的右边乘以一个相应的初等方阵

证：$A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ ……

性质：1) S_{ij} 对称且 $S_{ij}^{-1}=S_{ij}$.

2) $D_i(\lambda)$ 为对角阵 且 $D_i(\lambda)^{-1}=D_i(\lambda^{-1})$

3) $T_{ij}(\lambda)$ 为三角阵，且 $T_{ij}(\lambda)^{-1}=T_{ij}(-\lambda)$

证：显然 □

§3.3 $\Rightarrow$ $\forall A$ $\Rightarrow$ $\exists$ 初等方阵 $P_1,P_2,\cdots,P_s$ s.t.

$$P_s\cdots P_2P_1A=J$$

为阶梯形矩阵.

定理：$\forall A=(a_{ij})_{m\times n}$，$\exists$ m 阶初等方阵 $P_1,P_2,\cdots,P_s$ 和 n 阶初等方阵 $Q_1\cdots Q_t$

s.t.
$$P_s\cdots P_2P_1\cdot A\cdot Q_1Q_2\cdots Q_t=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

其中 r 为非负整数.

证：$B=(b_{ij})_{m\times n}=D_1(a_{pq}^{-1})\,S_{1p}\,A\,S_{1q}$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&C\end{pmatrix}=T_{m1}(-b_{m1})\cdots T_{21}(-b_{21})\,B\,T_{12}(-b_{12})\cdots T_{1n}(-b_{1n})$$

重复 $\square$

推论：$\forall A$，$\exists$ 可逆方阵 P（m阶）和 Q（n阶），使得

$$PAQ=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$$

注：r 不依赖于 P,Q 的选取，称为 A 的秩.

推论：若 A 为 n 阶方阵，则 A 可逆当且仅当 A 可以分解为一系列初等方阵的乘积.

证：$P_s\cdots P_1\,A\,Q_1\cdots Q_t=I$

$\Rightarrow A=P_1^{-1}\cdots P_s^{-1}Q_t^{-1}\cdots Q_1^{-1}$ $\square$

推论：若 A 为可逆矩阵，则

(1) 可对 A 作一系列初等行变换变为最简形式 I.

(2) 也可以 …… 列 ……

初等变换法(求逆):

- $AX = I \quad (\text{i.e. } X = A^{-1})$
- 设 $P_s \cdots P_1 A = I$，其中 P_i 为初等变换。

$$\Rightarrow X = P_s \cdots P_1$$

算法: $(A, I) \xrightarrow{\text{行初等变换}} P_s \cdots P_1 (A, I) = (I, A^{-1})$.

类似的解 $AX = B$!

例: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = ?$

解: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{2}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{2}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \quad \square$$

分块矩阵的初等行(列)变换：

例：A可逆，则可验证：

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \\ & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

例(分块矩阵求逆)：设 A,B,I 为 n阶方阵，BA=O，则

$$\begin{pmatrix} I & A & I & 0 \\ B & I & O & I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{注 } BA=0.]{\text{第二行减去第一行左乘}B} \begin{pmatrix} I & A & I & 0 \\ 0 & I & -B & I \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第一行减去第二行左乘}A} \begin{pmatrix} I & 0 & I+AB & -A \\ 0 & I & -B & I \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} I & A \\ B & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I+AB & -A \\ -B & I \end{pmatrix}.$$